Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 3 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln auch für die ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Sekundarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse **5**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

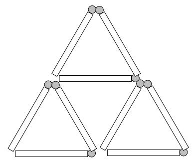
580511

In dieser Aufgabe sollst du aus Streichhölzern Figuren legen oder umlegen.

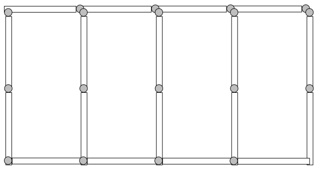
Dabei muss jedes Streichholz mindestens zu einer der gesuchten Figuren gehören.

Die Dreiecke und Quadrate können in jeder Figur auch unterschiedlich groß sein. Die Streichhölzer dürfen nicht übereinander liegen und sich nicht kreuzen.

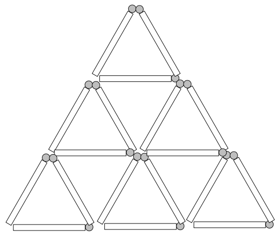
In der nebenstehenden Figur wurden mit 9 Streichhölzern insgesamt 5 Dreiecke gelegt, 4 kleine Dreiecke und ein großes.



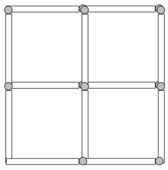
a) Lege mit 11 Streichhölzern eine Figur mit insgesamt 5 Dreiecken.
b) Lege mit 17 Streichhölzern insgesamt 8 Dreiecke.
c) Lege mit 12 Streichhölzern fünf Quadrate.
d) Lege in der Figur A zwei Streichhölzer so um, dass sechs Quadrate entstehen.
e) Nimm aus der Figur B fünf Streichhölzer so weg, dass nur noch vier Dreiecke übrig bleiben.
f) Lege in Figur C drei Streichhölzer so um, dass drei gleich große Quadrate entstehen.



Figur A



Figur B



Figur C

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

580512

Der berühmte Schatzsucher Brenner hat auf seiner Suche nach dem verlorenen Schatz des Regenbogens fünf Schlüssel gefunden.

Auf jedem Schlüssel steht jeweils eine der folgenden Zahlen: 2, 3, 4, 5, 6.

Auf seiner weiteren Reise findet er endlich die Schatztruhe. Sie hat vier Schlüssellöcher in den Farben Blau, Grün, Gelb und Rot. Auf der Truhe findet er folgende Inschrift:

„BLAU mal GRÜN plus GELB minus ROT ergibt 11.

Die vier richtigen Schlüssel öffnen gemeinsam die Truhe“.

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, mit denen der Schatzsucher die Truhe öffnen könnte.

580513

Ein automatischer Stempel druckt in jeder Sekunde eine Nummer. In der ersten Sekunde druckt er die Zahl 1, in der zweiten Sekunde die Zahl 2 und setzt mit den Zahlen 3, 4, 5, ... fort. In einer Minute druckt der Stempel also sechzig fortlaufende Zahlen.

a) Wie viele Ziffern 6 druckt er in der ersten Minute?
b) Wie viele Ziffern 0 druckt er in den ersten 5 Minuten?
c) Wie viele Ziffern 1 druckt er in den ersten 2018 Sekunden?

580514

Über die vier Schüler Stefan, Daniel, Meike und Jasmin und ihre Haustiere ist Folgendes bekannt:

(1) Es sind insgesamt vier verschiedene Tierarten: Hamster, Katzen, Hunde und Kaninchen.
(2) Die vier Kinder haben jeweils zwei verschiedene Haustiere, aber keine zwei Kinder haben die gleichen zwei Haustiere.
(3) Stefan und Daniel besitzen ein Tier der gleichen Tierart.
(4) Meike und Jasmin haben beide jeweils einen Hamster.
(5) Daniel hat weder eine Katze noch einen Hund.
(6) Nur ein Kind hat einen Hund. Das ist aber nicht Jasmin.

Welches Kind hat welche zwei Haustiere? Überprüfe, ob deine Lösung alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Olympiadeklasse **6**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

580611

Sieben Damen sind auf einer Kreuzfahrt und treffen sich zum Kaffeetrinken auf dem Sonnendeck. Sie diskutieren darüber, welcher Wochentag heute sei. Sie sagen Folgendes:

Agnes: Übermorgen ist Mittwoch.

Bertha: Nein, heute ist Mittwoch.

Clara: Ihr liegt beide falsch, Mittwoch ist morgen.

Doris: Quatsch. Heute ist weder Montag, Dienstag noch Mittwoch.

Elise: Ich bin sicher, dass gestern Donnerstag war.

Frieda: Nein, gestern war Dienstag.

Gertrud: Alles, was ich weiß, ist, dass gestern nicht Sonnabend war.

Leider haben sich sechs der Damen geirrt und nur eine Aussage der Damen entspricht der Wahrheit. An welchem Wochentag fand das Gespräch statt?

580612

Ein rechteckiges, aber nicht quadratisches Blatt Papier wird immer entlang der kürzeren Mittellinie gefaltet.

Wenn man das Blatt nach dem ersten Falten wieder auseinanderklappt, sieht man zwei gleich große Rechtecke. Wenn man das Blatt erst nach dem zweiten Falten wieder auseinanderklappt, sieht man vier kleinere Rechtecke.

a) Wie viele kleine Rechtecke erhält man, wenn nacheinander fünf Faltungen vorgenommen werden und das Papier dann wieder auseinandergefaltet wird?

b) Nach fünf Faltungen hat jedes der kleinen Rechtecke eine Länge von 4 cm und eine Breite von 3 cm.
Wie lang und wie breit ist das auseinandergeklappte rechteckige Blatt Papier? Finde eine Möglichkeit.

c) Berechne den Flächeninhalt des Blattes Papier.

d) Wie oft müsste man theoretisch das Blatt Papier falten, damit genau 128 kleine Rechtecke entstehen?

e) Wie häufig müsste man theoretisch das Blatt Papier falten, damit der Flächeninhalt jedes kleinen Rechtecks weniger als $1\,\text{cm}^2$ beträgt?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

580613

Zur Familie Wander gehören Mutter, Vater und die Kinder Lisa und Paul. In ihrem Urlaub wollen sie eine Seilbahn benutzen. In jeder Kabine können vier Personen Platz finden, zwei fahren rückwärts, zwei vorwärts.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Familie Wander, in einer Kabine die vier Plätze einzunehmen?
b) Der Vater möchte nur vorwärts fahren.
Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind unter dieser Bedingung möglich?
c) Am nächsten Tag macht der Vater eine lange Wanderung. Nur die Mutter und die Kinder nutzen wieder die Seilbahn. Sie nehmen zu dritt in einer Kabine Platz.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten haben sie, sich auf die vier Plätze in der Kabine zu verteilen?

580614

30 Regentropfen haben zusammen ein Volumen von etwa $1\,\text{cm}^3$.

a) Innerhalb einer Stunde sind 3 Liter Regen auf einen Quadratmeter Rasen gefallen. Wie viele Regentropfen waren das ungefähr?
b) Wie viele Regentropfen sind durchschnittlich pro Sekunde auf diesen Quadratmeter Rasen gefallen?

Gewitter-Regentropfen hingegen sind größer und haben ein Volumen von $\frac{1}{10}\,\text{cm}^3$.

c) Ein Gewitter dauerte eine Viertelstunde, und der Gewitterregen fiel so dicht, dass pro Sekunde auf jeden Quadratmeter Rasen im Mittel 120 Tropfen fielen. Wie viele Liter an Regenwasser sind während des Gewitters auf den Quadratmeter Rasen gefallen?

Hinweis: $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{ml}$

Olympiadeklasse **7**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

580711

Leonie hat ein Aquarium geschenkt bekommen und überlegt, wie viel Wasser sie dafür benötigt. Das Aquarium ist quaderförmig und oben offen. Leonie hat seine Innenmaße gemessen. Es ist innen 60 cm lang, 32 cm breit und 28 cm hoch.

a) Berechne das Fassungsvermögen von Leonies Aquarium.
b) Wie viel Kubikzentimeter Wasser bräuchte Leonie, wenn sie das leere Aquarium zu drei Vierteln mit Wasser füllen würde?
c) Wie hoch würde der Wasserspiegel stehen, wenn Leonie das leere Aquarium mit 48 Litern Wasser füllen würde?
d) Die Glaswände und der Boden des Aquariums haben eine Dicke von 1 cm. Berechne die Außenmaße des Aquariums.

580712

Annika hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Chiara und Emma eingeladen. Außerdem waren die Jungen Benjamin, David und die Zwillinge Florian und Gabriel eingeladen; jeder der vier Jungen hat eines der drei Mädchen als Schwester. Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen reihum Platz genommen hatten, stellte man fest, dass ein neben einem Jungen sitzendes Mädchen nicht dessen Schwester ist.

a) Untersuche, ob sich aus diesen Aussagen ermitteln lässt, welche dieser Jungen und Mädchen Geschwister sind.
b) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, wie die drei Mädchen und vier Jungen an diesem runden Tisch in der genannten alphabetischen Reihenfolge Platz nehmen können. Zwei Sitzordnungen gelten dabei genau dann als verschieden, wenn mindestens ein Platz anders besetzt ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

580713

Wir betrachten ein Rechteck $ABCD$ und einen Punkt P, der im Innern des Rechtecks auf der Mittelsenkrechten der Rechteckseite $\overline{AB}$ liegt. Die Größen der Winkel $\sphericalangle PBA$, $\sphericalangle DCP$ und $\sphericalangle DPA$ werden in dieser Reihenfolge mit β, γ und φ bezeichnet.

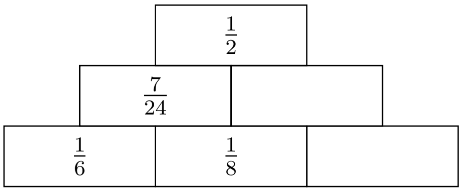
a) Berechne β unter der Voraussetzung, dass $\gamma = 40°$ und $\varphi = 70°$ gelten.

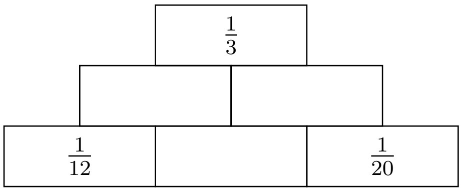
b) Berechne β unter der Voraussetzung, dass $\gamma = 40°$ gilt und die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DP}$ gleich lang sind.

580714

Die alten Ägypter kannten keine Dezimalbrüche, sondern schrieben positive echte gebrochene Zahlen als Summe von Stammbrüchen. Eine gebrochene Zahl ist positiv und echt, wenn sie größer als 0 und kleiner als 1 ist. Stammbrüche sind Brüche mit dem Zähler 1 und einer natürlichen Zahl größer als 1 als Nenner. Jede positive echte gebrochene Zahl lässt sich als Summe von Stammbrüchen darstellen. Dafür sind aber in vielen Fällen mehr als zwei Stammbrüche erforderlich.

a) Gegeben sind zwei unvollständig ausgefüllte Zahlenmauern der Addition.

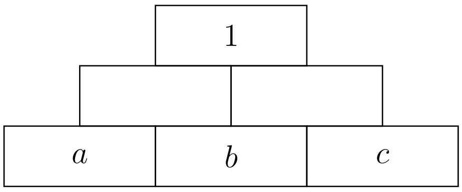




Überprüfe, ob die Eintragung der Zahl $\frac{7}{24}$ korrekt ist, und vervollständige beide Zahlenmauern.

b) Ermittle für die Zahlen $\frac{7}{18}$ und $\frac{4}{5}$ je eine Darstellung als Summe von Stammbrüchen, bei denen jeweils keine zwei Stammbrüche gleich sind.

c) Gib zu der abgebildeten Zahlenmauer zwei verschiedene korrekt ausgefüllte Zahlenmauern mit Stammbrüchen a, b und c an, bei denen $a > c$ gilt.



d) Für besonders interessierte Schülerinnen und Schüler: Ermittle zur Zahlenmauer aus Aufgabenteil c) alle korrekt ausgefüllten Zahlenmauern mit Stammbrüchen a, b und c, bei denen $a > c$ gilt.

Olympiadeklasse 8

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

580811

Bei der Mitgliederversammlung in einem Sportverein hatten die 80 anwesenden Mitglieder über drei Anträge abzustimmen:

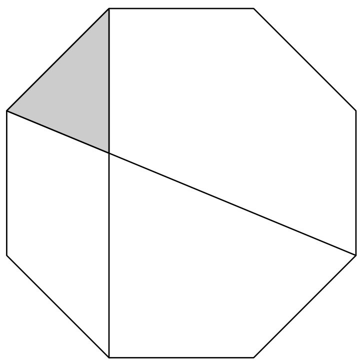
a) Für den ersten Antrag stimmten 65 % der Mitglieder, alle anderen stimmten dagegen.
Berechne, wie viele Mitglieder für und wie viele gegen den ersten Antrag stimmten.

b) Gegen den zweiten Antrag stimmten 20 Mitglieder, 12 enthielten sich der Stimme, die übrigen stimmten für diesen Antrag.
Berechne, wie viel Prozent der Mitglieder für den zweiten Antrag stimmten, wie viel Prozent sich der Stimme enthielten und wie viel Prozent gegen diesen Antrag stimmten.

c) Beim dritten Antrag hatten die Befürworter 12 Stimmen mehr als die Gegner. Stimmenthaltungen gab es keine.
Berechne, wie viele Mitglieder für und wie viele gegen den dritten Antrag stimmten.

580812

In einem regelmäßigen Achteck wird, wie in der Abbildung dargestellt, durch zwei Diagonalen und eine Seite ein grau markiertes Dreieck begrenzt. Bestimme die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks.



Hinweis: Alle gesuchten Größen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

580813

An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Nacheinander wird folgender Schritt wiederholt durchgeführt:

> Zwei Zahlen an der Tafel werden ausgewählt und durch die letzte Ziffer ihrer Summe und die letzte Ziffer ihres Produkts ersetzt.

Lässt sich durch geschickte Wahl der jeweils zu ersetzenden Zahlen erreichen, dass irgendwann nur noch gerade Zahlen an der Tafel stehen?

Wenn ja, beschreibe ein mögliches Vorgehen. Wenn nein, begründe, warum das unmöglich ist.

580814

Auf einem Tisch stehen eine Balkenwaage mit zwei Waagschalen und ein Satz Wägestücke. Dieser besteht aus je einem Wägestück der Masse 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g, 128 g, 256 g, 512 g, 1 024 g und 2 048 g. Auf die linke Waagschale wird ein Eisenblock mit einer Masse von 1 111 g gelegt. Es wird ein geeignetes Wägestück derart ausgewählt, dass durch das geeignete Verteilen dieses Wägestückes und aller leichteren aus dem Wägesatz auf die beiden Waagschalen Gleichgewicht hergestellt wird.

Begründe, dass die Wägestücke wie beschrieben auf die beiden Waagschalen aufgeteilt werden können und dass dann das 16 g-Stück unabhängig von der konkreten Aufteilung stets in der gleichen Waagschale liegt.

Hinweis: Bei einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen herrscht genau dann Gleichgewicht, wenn auf beiden Waagschalen die gleiche Masse liegt.

Olympiadeklassen **9 – 10**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

581011

Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke mit den folgenden Eigenschaften.

(1) Beide Katheten sind länger als 2.
(2) Verkürzt man beide Katheten um jeweils 2, so vermindert sich der Flächeninhalt um 10.

Die Längen und Flächeninhalte sind dabei in Maßzahlen bzgl. einer geeignet gewählten Längeneinheit und der zugehörigen Flächeninhaltseinheit angegeben.

a) Gibt es unter diesen Dreiecken eines, bei dem die Länge einer der beiden Katheten 4 beträgt?

b) Bestimmen Sie alle Werte, die die Summe der Kathetenlängen unter den genannten Bedingungen annehmen kann.

c) Welche der betrachteten Dreiecke haben zusätzlich die folgende dritte Eigenschaft?
   (3) Verlängert man beide Katheten um jeweils 2, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 14.

581012

Hans würfelt mit vier idealen sechsseitigen Spielwürfeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen eine Primzahl ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen kleiner als 11 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581013

Ähnlich wie bei einer Schokoladentafel wird ein Rechteck $ABCD$ mit den positiven ganzzahligen Seitenlängen $|AB| = p$ und $|AD| = q$ durch $p - 1$ Parallelen zu $\overline{AD}$ (*Längslinien*) in p Rechtecke der Breite 1 (diese Rechtecke sollen *Rippen* heißen) und diese wiederum durch $q - 1$ Parallelen zu $\overline{AB}$ (*Querlinien)* in je q Quadrate der Seitenlänge 1 geteilt. Die Rippen werden von $\overline{AD}$ aus fortlaufend mit $1, 2, \ldots, p$ nummeriert. Das Rechteck wird nun längs der Diagonalen $d = \overline{AC}$ zerschnitten.

a) Es sei $p = 132$ und $q = 15$. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Schnittpunkte von d mit den Querlinien auf einer Längslinie liegt.

b) Sei nun $p = 41$ und $q = 37$. Ermitteln Sie die Nummern aller Rippen, in deren Innerem kein Schnittpunkt der Strecke d mit einer Querlinie liegt.

c) Schließlich sei $q > 1$ und $p = q^2 - 1$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von q die Anzahl der Rippen, in deren Innerem ein Schnittpunkt einer Querlinie mit der Strecke d liegt.

581014

Aus den sechs Ziffern 2, 3, 4, 5, 7 und 9 werden zwei dreistellige Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet wird. In dieser Aufgabe wird die Quersumme der Summe der beiden gebildeten Zahlen untersucht.

Beispiel: Es werden die beiden dreistelligen Zahlen 539 und 247 gebildet. Man erhält die Summe $S = 786$. Deren Quersumme ist $Q = 7 + 8 + 6 = 21$.

a) Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den diese Quersumme annehmen kann.

b) Bestimmen Sie alle Summen, die zur kleinstmöglichen Quersumme führen.

581015

Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei definiert durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4\,a_n + 4} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\,.$$

a) Berechnen Sie die neun Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots, a_9$.

b) Versuchen Sie aus den Resultaten des Aufgabenteils a) eine möglichst einfache, explizite Formel für a_n abzuleiten. Formulieren Sie Ihr Resultat als eine Vermutung. Welcher Wert ist für die Zahl a_{2018} zu vermuten?

c) Zeigen Sie, dass Ihre Formel für a_n tatsächlich den beiden Bedingungen $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4\,a_n + 4}$ genügt.

Hinweis: Die Zahlenfolge $3, 5, 9, 17, \ldots$ bzw. $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, \ldots$ wird mit dem Bildungsgesetz

$$a_1 = 3 \text{ und } a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

berechnet, also $a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ usw. Man erhält dieselbe Zahlenfolge mit Hilfe der expliziten Vorschrift $a_n = 2^n + 1$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581016

Gegeben seien zwei Strecken der Länge s in der Ebene, die keinen Punkt gemeinsam haben. Wir betrachten hierzu die folgende Aussage.

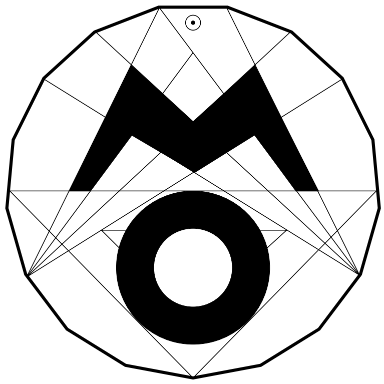
> Es gibt einen Endpunkt A der einen Strecke sowie einen Endpunkt B der anderen Strecke derart, dass für die Länge der Strecke $\overline{AB}$ gilt: $|AB| > s$. (1)

Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussage (1) für folgende Fälle.

a) Die beiden Strecken liegen auf parallelen Geraden.

b) Die Strecken liegen auf Geraden, die sich in einem Punkt X schneiden, der im Inneren von genau einer der beiden Strecken liegt.

c) Die Strecken liegen auf Geraden, die sich in einem Punkt X schneiden, der außerhalb beider Strecken liegt.



Olympiadeklassen **11 – 12**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

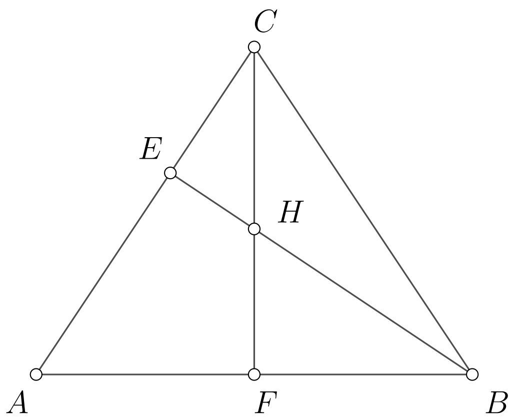
581211

Man bestimme die kleinstmögliche Quersumme einer durch 37 teilbaren positiven ganzen Zahl.

581212

Ein Dreieck ABC sei spitzwinklig und gleichschenklig mit $|BC| = |CA|$. Die Fußpunkte der Höhen von B und C auf die jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ werden mit E beziehungsweise F bezeichnet. Der Schnittpunkt der Höhen $\overline{CF}$ und $\overline{BE}$ sei H, vgl. Abbildung A 581212.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $HEAF$, wenn die Längen $|CE| = 5$ und $|EA| = 8$ bekannt sind?



A 581212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581213

Auf einem Schachbrett mit 8×8 Feldern bedroht ein Turm alle Schachfiguren, die in der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte stehen wie er selbst, unabhängig davon, ob ein weiterer Turm dazwischen steht oder nicht.

Wie viele Türme können auf dem Schachbrett maximal so platziert werden, dass jeder Turm höchstens zwei weitere Türme bedroht?

581214

Gesucht sind alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^2 + ay = a\,, \tag{1}$$

$$x + a^2y^2 = a\,. \tag{2}$$

a) Für $a = 1$ bestimme man alle Lösungspaare (x, y).

b) Man bestimme für jede beliebige reelle Zahl a die Anzahl der verschiedenen Lösungspaare und gebe diese an.